

Utilisation des probabilités

Sous ce titre pompeux se cache une critique argumentée de ce que l'on peut lire et entendre trop couramment, malheureusement,.

Probabilités mise à toutes les sauces.

Type d'exercice n'ayant rien à voir avec les probabilités. Dans le meilleur des cas, il s'agit d'exercice basé sur des calculs de proportions. Voici un exemple :

Je me suis intéressé à la définition de "variable aléatoire". La voici: La variable aléatoire est l'univers est une fonction X de l'univers vers R , c'est à dire une fonction qui, à une issues de l'expérience aléatoire, associes un nombre réel.

Une usine produits des pièces utilisées pour la fabrication de machines. On suppose que toutes les pièces produites sont vendues. Des tests ont montré que, sur une production de 1800 pièces, 45 pièces sont défectueuses. Les pièces défectueuses réparées avant commercialisation.

On sait que:

Le cout de fabrication d'une pièce est de 7 euros

Le cout de réparation d'une pièce défectueuse est de 4 euros

Chaque pièce est vendue 15 euros.

a) Calculer le gain moyen par pièce produite

Donc, la proportion de pièces défectueuses est 45/1800 soit 1/40

Soit G la variable aléatoire égale au gain rapporté par une pièce fabriquée

Voici ma question:

Je ne comprends pas pourquoi ici on parle de variable aléatoire, on n'a pas pourtant à faire à une expérience aléatoire ?

Cet élève a parfaitement raison, ce problème n'a strictement rien à voir avec les probabilités, variables aléatoires et autre notion du chapitre concerné.

Autre exemple plus grave, puisqu'il est basé sur le sport. Les énoncés peuvent varier, mais le principe reste le même : A et B sont deux sportifs en compétition, par exemple le tennis. Le joueur A a gagné les 2 premiers sets, le joueur B a gagné les 3 jeux précédents ; quelle est la probabilité que A gagne contre B ?

Les auteurs de ce type d'exercice mélangent "probabilité" et "pari". Les probabilités sont basées sur des notions parfaitement rigoureuses faisant intervenir le hasard, lequel ne doit pas être confondu avec la chance. D'autre part, ce type d'énoncé laisse supposer que l'issue d'une compétition sportive dépend du hasard et non des qualités des sportifs eux-mêmes.

Calculs basés sur des hypothèses fausses.

Un exemple qui mérite plus d'attention.

On considère un jeu qui se joue à deux joueurs. Le premier joueur choisit deux nombres réels distincts comme il lui plaît (insistons bien sur ce point : les nombres ne sont pas nécessairement tirés au hasard). Puis il tire à pile ou face : si la pièce tombe sur pile, il communique le plus petit nombre au second joueur, sinon, il lui communique le plus grand. C'est la seule information dont dispose le second joueur. Son but est de déterminer si la pièce était tombée sur pile ou face, autrement dit, si l'autre nombre était plus grand ou plus petit.

On demande s'il existe une façon pour le second joueur de faire son choix qui lui assure d'avoir raison avec une probabilité strictement supérieure à 1/2.

Réponse naïve (et fausse)

C'est absolument impossible ! Tout ce qu'on communique au second joueur, c'est un nombre réel, et on lui demande de déterminer si un autre nombre réel (absolument sans rapport, et qui ne lui est pas donné) est plus grand ou plus petit. C'est absurde !

Votre mission, si vous l'acceptez, c'est de trouver une procédure (recourant éventuellement au hasard) qui donne un léger avantage au second joueur.

Je ne donnerai pas le détail de cette "démonstration", simplement qu'elle est basée sur le principe que la "dimension" entre les nombres a et b choisis par le joueur "1" est plus petite que la dimension $]-\infty; \min(a,b)]$ augmentée de la dimension $[\max(a,b); +\infty[$.

Conclusion, merci Cantor et méfiez-vous, les Casinos.

Il faut tout de même étudier plus en détail et trouver l'erreur du raisonnement.

La question posée est simple, la réponse est OUI ou NON. Il n'y a que deux possibilités, celles-ci sont strictement interchangeable, de la même façon que les faces marquées d'un dé à jouer.

Le choix du joueur '2' consiste à "gagner", c'est exactement la même chose que "ne pas perdre", les deux issues sont équivalentes, elles ne diffèrent que par le vocabulaire employé, il n'y a donc aucune raison de privilégier l'une plutôt que l'autre.

Dans la démonstration il y a deux termes remarquables, "nombre réel" et "infini".

Un nombre réel a une définition parfaitement claire en mathématique. Mais que cela signifie-t-il dans le monde réel concerné par les probabilités et l'exercice proposé ? A vrai dire, par grand-chose, sauf qu'on est incapable de connaître sa valeur. On en utilise une valeur approchée, le mathématicien sait que c'est un nombre réel, il sait le manipuler sur le papier ou au tableau noir, mais ça s'arrête là. En particulier, il ne peut pas déterminer, encore moins comparer, la dimension des intervalles entre deux nombres réels, tel que cela est soigneusement expliqué dans la démonstration.

De la même façon, la notion d'infini est utilisée. Cette notion n'existe pas dans le monde réel.

Il est correct de dire "tendre vers l'infini" ou "infiniment grand", mais l'infini n'existe pas et son utilisation dans certaines démonstrations conduit à des aberrations, on connaît la démonstration qui dit que la somme des entiers de 1 à ∞ vaut $-1/12$. C'est un classique.

On peut noter que l'auteur de la démonstration, utilise des mots clés comme gaussien, bijection qui masquent l'argumentation elle-même.

Evidemment, dans le cas présent, on peut se demander si l'auteur de la démonstration croit réellement à ce qu'il a écrit. Par contre, il est certain qu'on peut regretter qu'il n'y ait pas eu de réaction de "remise à plat".

Utilisation un peu compliquée, mais légitime.

Je citerai maintenant un exemple intéressant. Dans une section d'un forum de mathématique où il est question d'histoire drôles, on peut lire ceci :

Déclaration de G. R. Un match de Foot se joue avec 3 arbitres, il y a donc 3 fois plus de chances qu'il y ait des erreurs d'arbitrage...

On ne sait pas dans quel contexte cette phrase a été dite, ni d'ailleurs en quoi le mathématicien qui l'a citée la trouve drôle. Par contre, il me paraît intéressant d'analyser l'expression "erreur d'arbitrage".

Pour plus de détails concernant les notions de base, on pourra se rapporter aux papiers "[Notions de probabilité](#)" et "[Incertitudes et Erreurs](#)".

Rappel, il y a deux types d'erreurs, les erreurs systématiques et les erreurs accidentelles.

La notion d'erreur systématique.

Les erreurs systématiques n'ont aucun rapport avec les probabilités mais il me paraît utile d'apporter quelques précisions. Dans pratiquement tous les cas de mesures, quels qu'ils soient, il y a un risque d'erreur systématique. Par exemple l'erreur d'étalonnage en mesure de longueur, l'initialisation à zéro pour certains appareils. Dans le cas où l'appareil de mesure est l'homme, on peut citer l'erreur de parallaxe d'une lecture sur un cadran, chacun a un œil directeur, mais l'appareil est en face de lui. Dans une mesure de comptage, un individu aura tendance à noter son heure d'arrivée = début d'observation, puis de s'installer. A la fin de la journée, ranger son matériel puis noter son heure de départ = fin d'observation. Dans le cas d'un arbitre de foot, on peut imaginer que, suite à des événements passés ou pour toute autre raison, son subconscient soit plus sensible à certaines situations ou au contraire plus tolérant. On peut tout de même considérer que ces erreurs systématiques sont rares chez les arbitres, sinon, ils ne seraient plus arbitres. Ce point méritait d'être précisé.

Les erreurs accidentelles.

Les erreurs qui ne sont pas systématiques sont dites accidentelles. Je ne sais pas d'où vient ce qualificatif, en tout cas, c'est celui qui est utilisé pour toutes les erreurs qui ne sont pas systématiques. Toute mesure est entachée d'une erreur accidentelle. Cela n'a rien à voir avec une faute. De très nombreuses études ont montré que l'apparition et la valeur d'une erreur accidentelle suivaient les lois du hasard. Une mesure faite par un homme est toujours entachée d'une erreur accidentelle. Dans le cas de l'arbitre de foot, la mesure consiste à siffler ou ne pas siffler. Effectivement c'est binaire, on pourra appeler cela une décision au lieu d'une mesure. Dans le cas de juges-arbitres dans des sports tels que le patinage artistique, il s'agit d'attribuer une note, donc on est plus proche d'une mesure telle qu'on l'entend habituellement. Il est donc légitime de parler d'erreur d'arbitrage, et puisqu'on est dans un contexte mathématique, cela n'a aucun rapport avec une faute d'arbitrage.

Que cela signifie-t-il mathématiquement ?

En matière de probabilité, les lois de base sont simples :

- Le hasard est unique.
- Lors d'un certain nombre de mesures d'une même quantité, la moyenne arithmétique est la valeur la plus probable.
- La loi des grands nombres précise que lorsque le nombre d'expériences est grand, la fréquence des apparitions tend vers leur probabilité.
- La répartition des écarts à la moyenne tend vers la loi normale (TCL).

Tout ceci a été détaillé dans les papiers précédemment cités.

Concernant la théorie des erreurs, comme dit plus haut, de très nombreuses études ont montré que l'apparition des erreurs et leur valeur dépend du hasard, c'est à dire est aléatoire. Les erreurs sont calculées par rapport à la moyenne arithmétique des mesures. Les erreurs les plus grandes ont la plus faible probabilité d'arriver. La répartition des erreurs est toujours la même.

Revenons à la citation de G. R. : un match de foot se joue avec 3 arbitres. On a vu qu'on pouvait négliger les erreurs systématiques, la question se pose donc : comment se combinent les erreurs de chacun des 3 arbitres. Mathématiquement, il y a deux possibilités, soit les arbitres jugent indépendamment et ne se concertent pas, soit les décisions sont prises collégialement.

Dans le premier cas, et je crois que c'est la règle, la décision de chaque arbitre est irrévocable, c'est à dire que les arbitres sont totalement indépendants, alors, cela paraît évident que la probabilité d'une erreur d'arbitrage à un instant donné est strictement proportionnelle au nombre d'arbitres, il en est de même pour la totalité du match. La déclaration de G. R. est rigoureusement exacte sur le plan mathématique, même si elle paraît inattendue ou hors de propos dans un contexte sportif.

Imaginons le second cas, qui ne semble pas être celui du foot, mais est celui des juges-arbitres dans d'autres sports. Alors, la décision prise (ou la note adoptée) est la moyenne arithmétique des décisions. On a vu que les erreurs se calculent par rapport à la moyenne et que la variance résultante est égale à la somme des variances pour des mesures successives et à la moyenne des variances pour des mesures d'une même quantité. On dit plus fréquemment que les écart-type se combinent quadratiquement, ce qui équivaut.

Rappel concernant l'écart-type.

L'écart-type est un nombre réel, strictement positif, caractérisant la "précision" du résultat d'une mesure ou d'une observation. Etant donné un appareil ou méthode de mesure, c'est une valeur intrinsèque à l'appareil ou à la méthode.

On peut estimer que les 3 arbitres de foot ont une fiabilité équivalente, c'est à dire leurs écarts-types ont même valeur. Il en résulte que la variance des "erreurs d'arbitrages" sur un match où les 3 arbitres décident de façon collégiale, est égale à la variance divisée par 3, soit l'écart-type de l'arbitre-type divisé par racine(3).

Exemple d'exercice correct.

Un orage est filmé à l'aide de plusieurs caméras. L'analyse croisée des signaux audio et vidéo sur une caméra donne une mesure du temps de trajet du tonnerre depuis le point d'impact de la foudre jusqu'à la caméra. Les positions des caméras dans un repère cartésien (en m) sont les suivantes : (107,159), (1482,363), (1098,582) et (299,1555).

Les temps de trajet (en s) respectifs mesurés du tonnerre pour un impact sont :

1.320, 2.807, 1.839 et 3.509.

On suppose que le point d'impact et les caméras sont dans un même plan horizontal et que la célérité du son dans l'air est constante et égale à 340 m/s.

Quelle est la position du point d'impact de la foudre ?

Mais je tiens à préciser que la résolution de cet exercice nécessite une très bonne connaissance de toutes les notions évoquées ici.