Système de N équations du second degré à N inconnues.

Positionnement du problème.

On a souvent à résoudre des systèmes linéaires à N inconnues. Généralement, la solution existe et elle est unique. La méthode couramment employée est la méthode du pivot de Gauss. Supposons que les équations soient du second degré. On sait qu'en général il y plusieurs solutions, c'est à dire plusieurs ensembles de valeurs pour les inconnues qui satisfont le système. Etant donné qu'il s'agit de calcul numérique, seul un ensemble de valeurs nous intéresse. On peut supposer que l'on connaisse une valeur approché de ces valeurs. Toute méthode peut être utilisée pour trouver cet ensemble. Il ne peut pas exister de recette miracle, puisque chaque cas est différent.

Détail de la méthode.

Pour trois inconnues, chacune des trois équations sera de la forme suivante :
$ax^2 + bx + cy^2 + dy + ez^2 + fz + gxy + hxz + iyz + u = 0$
Où les inconnues sont x, y et z et 'a' à 'i' et 'u' des paramètres qui ne doivent pas être tous nuls.
Les trois inconnues apparaissent au carré et sous forme de produit (xy, xz, yz). Un produit de la forme xyz ne peut pas exister, puisqu'il s'agit d'équation du second degré.

Soit X, Y et Z les valeurs approximatives.
Si on effectue le calcul avec ces valeurs, le terme de droite ne sera plus 0 mais 'r' qu'on appelle le résidu.

Reprenons les équations de base et appelons δx, δy et δz les corrections à apporter à X, Y et Z pour trouver les valeurs cherchées, autrement dit, $x = X + \delta x$; $y = Y + \delta y$; $z = Z + \delta z$ que l'on applique aux équations de base.
Après développement, on peut isoler les termes de l'équation de base que l'on remplace par les résidus 'r', pour chaque équations, c'est à dire
$aX^2 + bX + cY^2 + dY + eZ^2 + fZ + gXY + hXZ + iYZ + u = r$
Il reste des termes de la forme suivante
δx^2 ; δy^2 ; δz^2 ; δx ; δy ; δz ; $\delta x\delta y$; $\delta x\delta z$; $\delta y\delta z$, avec leur paramètre, et une constante.
Rappelons que les valeurs δx, δy et δz sont des corrections, donc des valeurs "petites". Le carré ou le produit de ces valeurs sont négligeables puisque ce sont des valeurs petites du second ordre.
Il reste donc des équations linéaires du premier degré que l'on sait résoudre sans difficulté.

On peut donc remplacer x par $X + \delta x$, y par $Y + \delta y$ et z par $Z + \delta z$ et ainsi calculer un nouveau résidu, autrement dit, x, y et z sont les nouvelles valeurs approchées de la solution.
On recommence l'opération jusqu'à obtenir la précision recherchée.

Cette méthode s'apparente à la méthode de Newton, et de la même façon, on constate que la convergence est très rapide.

Pour un système à 3 inconnues, on peut envisager de le faire à la main, avec une calculette, mais il est clair que si le nombre d'inconnues, donc d'équations, est plus important, il est préférable d'écrire un module dans un langage informatique.

Discussion.

On peut se demander si un mauvais choix des valeurs approchées pouvait avoir une influence sur le résultat. On rencontre ce type de question en géométrie, par exemple le calcul de l'intersection d'une droite et d'un cercle. On sait qu'il y a en général deux solutions, mais, à l'évidence on n'en a besoin que d'une seule. Certains logiciels de CAO ont choisi la méthode qui consiste à fixer un "point proche".

Dans le cas du système du second degré, il s'agit à peu près de la même logique. A supposer que les deux valeurs solution sont très voisines, ce qui correspondrait à un discriminant presque nul, les deux valeurs, si elle vérifient le système, sont aussi valables l'une que l'autre.
Il en résulte que deux choix différents de valeurs approchées pourront, dans certains cas, donner des résultats différents, mais on ne peut pas savoir *a priori* quel résultat on doit adopter. Seule une étude *a posteriori* peut permettre un choix définitif. On peut d'ailleurs considérer qu'un système qui aurait une telle caractéristique n'est pas un "bon système".

On pourrait aussi se demander si cette méthode converge toujours. Géométriquement et dans le plan, cette résolution consiste à calculer l'intersection de deux coniques. On sait que le nombre de solutions est quatre, deux ou zéro (en excluant les points doubles). Si le calcul par cette méthode ne converge pas, c'est tout simplement qu'il n'y a pas d'intersection, donc pas de solution.