Bertrand et sa corde.

Enoncé.

Dans un plan, soit une droite D et un point quelconque O. On appelle d la distance orthogonale du point O à la droite D.
On trace le cercle C de centre O et de rayon R.

1- Quelles sont les limites de R pour que le cercle C coupe la droite D ?
2- Soient A et B les intersections du cercle C et de la droite D. Calculer la relation entre d et R pour que AB soit un côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle C.
3- R étant fixé, quelles sont les limites de d pour lesquelles le cercle C et la droite se coupent, c'est à dire que le segment AB existe ?
4- Quelles sont les valeurs de d en fonction de R telle que le segment AB soit plus grand que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?
5- Dans tout ce qui précède, le système de référence était la droite D, le point O étant un point quelconque, pris au hasard. Imaginons maintenant que le système de référence est défini par le point O. Le cercle de rayon R est donc fixé. La droite D est prise au hasard. Tout ce qui a été calculé précédemment est indépendant du système de référence et peut être appliqué avec ce nouveau système de référence. Si on admet la formulation "la droite D est prise au hasard", y a-t-il plusieurs méthodes possibles de calcul de la condition étudiée pour la longueur du segment AB ? Si on considère que la formulation "la droite D est prise au hasard" n'est assez précise, quelle formulation pourrai-t-on proposer ?

Réponse :

(1) : $R > d$. ; (2) : $R = 2$ d. ; (3) : $d < R$. ; (4) : $d > R/2$.

Question 5. On reconnaît bien-sûr le paradoxe de Bertrand.
Qu'est-ce qui caractérise la droite D ? sa direction et un point de passage. Ces deux éléments indépendants définissent la distance d au centre O.
On est donc ramené à la situation de base (D fixé et O quelconque), à un changement de repère près. Il n'y a pas d'autre méthode possible de trouver la condition cherchée.

A propos des deux autres méthodes souvent proposées. Pour rappel, la méthode dite N°1 consiste à partir du point A et à calculer la "proportion" d'angle de l'arc AB, par rapport à 2π, la méthode dite N°3 consiste à diviser l'espace intérieur du disque en carrés élémentaires, le segment étant déterminé par son centre pris aléatoirement dans le quadrillage.
On peut lire dans "Probabilités et Statistiques" de John Harthong, une démonstration détaillée que ces deux hypothèses ne correspondent pas à une répartition équitable des cordes. Puis il donne une explication très imagée de la réalité du phénomène.