Application de la loi normale.

Nota : Il est indispensable de lire l'article en entier.

Soit l'énoncé d'un exercice :

Dans une ville, la consommation journalière d'eau (en millions de litres) est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par f(x) = ¼ x $e^{-x/2}$ si x supérieur à 0 (0 sinon).

1- *Quelle est la probabilité que la consommation journalière de cette ville ne dépasse pas 5 millions de litres ?*
2- *Si la ville ne peut fournir plus de 8 millions de litres par jour, quelle est la probabilité qu'une journée, la ville ne puisse répondre à le demande ?*
3- *Quelle devrait être la capacité journalière de la ville pour que la probabilité de répondre à la demande soit de 95% ?*

Il y a dans cet énoncé deux expressions importantes "variable aléatoire" et "densité de probabilité". Le TCL indique que toute expérience aléatoire a une répartition des écarts à la moyenne conforme à la répartition normale (Loi de Gauss).
Cette fonction s'écrit $g(z) = 1/\text{rac}(2\,\pi)\ e^{-z^2/2}$.
La question peut donc se poser de savoir si l'affirmation "variable aléatoire" est justifiée ou non. Pour vérifier qu'elle est justifiée, il faudrait que la fonction f(x) soit de la forme de la fonction de Gauss, c'est à dire puisse être écrite sous la forme g(x).
Prenons le logarithme :
$\ln(f(x)) = \ln(1/4) + \ln(x) - x/2$
$\ln(g(z)) = \ln(1/\text{rac}(2\,\pi)) - z^2/2$
Si f et g sont égales, il en est de même pour leur logarithme, on exprime z sous la forme $z^2/2$
$z^2/2 = \ln(1/\text{rac}(2\,\pi)) - \ln(1/4) - \ln(x) + x/2$
Affirmation : "Ce changement de variable montre que f(x) est bien de la forme canonique de la fonction de Gauss".

Essai d'explication.

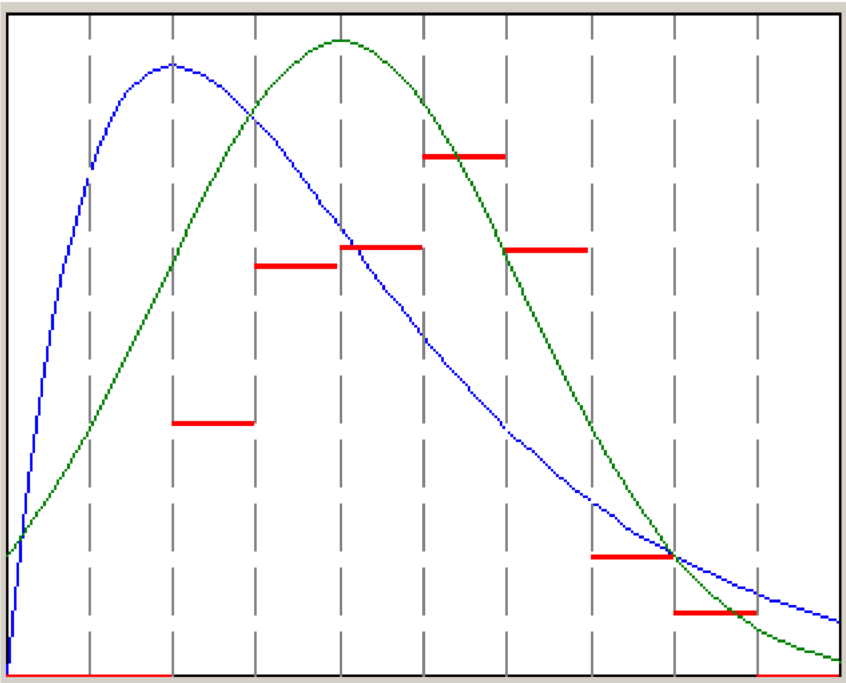
Dans une ville, la consommation d'eau a plusieurs origines. On peut citer, les fuites, la consommation humaine, la consommation industrielle, la consommation exceptionnelle etc. Chacune de ces consommations est indépendante des autres, et chacune peut être considérée comme aléatoire, au sens mathématique.
Ici, on s'intéresse à la consommation journalière globale. On peut supposer que les services techniques ont noté, jour après jour, cette consommation et ont mis au point un modèle, sous forme de la formule proposée.

Forme de la représentation graphique.

f(x) = ¼ x exp(-x/2)

Un calcul approché donne le maximum pour 2 millions de litres environ. L'abscisse du point d'inflexion de la courbe, qui correspond normalement à la valeur de l'écart-type, est 4 millions de litres (environ).

On observe effectivement que la courbe croît de 0 à 2000 m3/j, puis décroît en passant par un point d'inflexion pour 4000 m3/j, enfin tend vers son asymptote, l'axe des X.



Voila la courbe de la fonction de densité de probabilité.
La borne en X est 10 (millions de litres par jour.).

Surcharge du graphique :
Les barres en rouge correspondent au résultat d'une simulation (consommation moyenne 4000 m3/j) :

1- Consommation humaine 25% constante, doublée 1 jour sur 7.
2- Consommation industrielle 70% aléatoire.
3- Consommation exceptionnelle 5% aléatoire.

La valeur de consommation a été ajustée de manière à correspondre approximativement à la consommation de l'énoncé.
La courbe en vert représente approximativement la courbe de Gauss avec les valeurs $\mu=4$ et $\sigma=2.8$, calculées plus loin. On remarque l'écart avec les barres rouges dues à la simulation réalisée avec une constante de consommation humaine.

Cette fonction ressemble beaucoup à la loi de Lévy. Cette loi ne s'applique pas vraiment au contexte de consommation d'eau dans une ville.
Autre invraisemblance, pour x=0, la probabilité est nulle, ce qui serait compatible avec un phénomène de fuite. Par contre, si on simule une fuite, le pic de consommation se déplace vers les X positifs, ce qui est contradictoire avec la fonction proposée.

Inégalité de Bienaymé

"Remarquons que des erreurs très supérieures à $\sigma(z)$ sont très peu probables. Supposons en effet que zi soit une valeur de z telle que $zi-m_1(z) = k.\sigma(z)$, k étant un nombre plus grand que un.
Soit C la probabilité de $zj-m_1(z)$. Nous pouvons écrire,
$\sigma^2(z) = \Sigma a'i[zi-m_1(z)]^2 + C[zj-m_1(z)]^2 = \Sigma a'i[zi-m_1(z)]^2 + C.k^2\sigma^2(z)$.
Cette expression montre que $C < 1/k^2$, puisque tous les termes sont positifs."
(JJ Levallois 1960)
Dans le cas présent, supposons k=2, la probabilité d'avoir une telle consommation journalière est donc inférieure à 25%.
Evaluons la moyenne et l'écart-type de cette consommation en eau suivant la formule indiquée. Le calcul numérique de 0 à 20 millions de litres avec un pas de 0.01 donne
Moyenne (espérance) = 3.99. (on prendra μ=4).
Variance = 7.84, soit un écart-type = 2.80.
Appliquons l'inégalité de Bienaymé pour k=2. La probabilité d'avoir une consommation journalière C est inférieure à ¼.
La probabilité de dépasser μ + 1.5* 2.8 = 8.2 millions de litres est inférieure à 44%
La probabilité de dépasser μ + 2* 2.8 = 9.6 millions de litres est inférieure à 25%
La probabilité de dépasser μ + 3* 2.8 = 12.4 millions de litres est inférieure à 11%
La probabilité de dépasser μ + 4* 2.8 = 15.2 millions de litres est inférieure à 6%
Les valeurs données par l'inégalité de Bienaymé correspondent à des bornes infranchissables, mais on observe que celles-ci sont sans rapport avec celles obtenues par l'exploitation de la fonction de densité de probabilité proposée.

En gardant ces hypothèses de consommation moyenne μ=4000 m3 et écart-type = 2800 m3, La probabilité de dépasser 5870 m3 est 25%, celle de dépasser 7740 m3 est 9%, pour assurer à 95% une alimentation suffisante, il faudrait un capacité de 9.6 m3.

Conclusion.

On constate que suivant la façon dont on aborde le problème, soit la fonction de densité de probabilité, soit un calcul d'espérance et d'écart-type on obtient des résultats complètement différents. Sur le plan strictement mathématique, l'affirmation (1er paragraphe) que les deux fonctions sont équivalentes est fausse. La fonction g(z) est paire, après le changement de variable, ce n'est plus vrai.
On est donc bien loin d'un calcul de probabilité dans le domaine du réel : la consommation en eau.

L'énoncé de l'exercice n'a aucun rapport avec des notions de probabilité. Il semble qu'il ait été rédigé pour faire faire un calcul d'intégrale, puis un calcul de proportionnalité.
Le message de demande d'aide de l'étudiant comporte une photo de l'énoncé, il ne peut donc pas y avoir d'erreur de recopie. Malheureusement le titre du livre n'est pas précisé.