Article publié par la revue GEOMETRE 1973 N°4.

COMPENSATION PENDULAIRE ET CALCUL DES PROBABILITÉS

par **P. CHARLOT**

On se souvient de l'intérêt suscité par la relation d'un mode très original de compensation mécanique que nous avons proposé de dénommer « Compensation pendulaire ».

Un premier article (« Géomètre » de novembre-décembre 1969) avait fait ressortir l'intérêt particulier de l'application du procédé aux nivellements géométriques, à la gravimétrie ainsi qu'à tout réseau de Kirchhoff. Une publication suivante (« Géomètre » de juillet et octobre 1971) révélait l'attrait de ce mode de compensation appliqué à la triangulation et à la trilatération. Et nous avons encouragé l'auteur, M. P. Charlot, à poursuivre ses études en étendant notamment la méthode au domaine à trois dimensions.

Dès maintenant cette espérance se trouve dépassée : on peut appliquer le procédé à n dimensions... La justification en sera donnée ultérieurement.

Mais auparavant, une révélation est apparue : la relation directe des résultats de la compensation pendulaire avec ceux du calcul des probabilités qui, depuis Laplace, n'a cessé de faire l'objet des préoccupations de nombreux chercheurs.

Dans cette nouvelle partie, présentée ci-après, M. Charlot reprend tout ce qu'il faut retenir de l'acquit dans ce domaine du calcul des probabilités, pour saisir ensuite l'apport qui y sera fait.

Avant de retenir notre pensée sur la généralité du phénomène et sa traduction mathématique, M. Charlot nous invite à découvrir la forme si connue de la courbe de Gauss dans le profil d'un sentier, les dalles usées d'un escalier...

Depuis lors, comment se délivrer de cette obsession qui vous fait découvrir partout des courbes « campaniformes » ? Le vieil étal du boucher, irrégulièrement usé par le hachoir, nous décèle une superbe courbe de Gauss !

Il est vrai que partout où la dispersion est limitée, on constate une symétrie avec des écarts d'autant plus nombreux qu'ils sont plus petits. Mais là où l'obsession gagne démesurément l'observateur, c'est quand il parcourt le Champ de Mars : l'énorme Tour à quatre pattes qui le domine n'affecte-t-elle pas la forme d'une gigantesque courbe de Gauss ? C'est ainsi une idée fixe qui pourrait gagner les esprits préoccupés de... gaussisme !

Quoi qu'il en soit, un regard neuf peut apporter des idées fort attrayantes dans un vieux problème qui ne sera jamais, semble-t-il, complètement ni définitivement traité. Et nous devons savoir gré à M. Charlot de ses courageux efforts si méritants pour apporter quelques pierres nouvelles à un édifice qui risque de n'être jamais terminé.

Professeur Robert TATON.

SOMMAIRE

1^{re} PARTIE : **THEORIES CLASSIQUES**
I. Probabilité.
II. Probabilité totale.
III. Probabilité composée.
IV. Lois de Laplace.
V. Loi, ou formule de Laplace.
VI. Démonstration de Gauss.
VII. Courbe (ou fonction) réduite.
VIII. Justification des moindres carrés.
IX. Nouvel apport de Gauss.
X. Généralisation des moindres carrés.
XI. Construction de la courbe de Laplace-Gauss.
XII. Forme de la courbe de Laplace-Gauss.

2^{e} PARTIE : **COMPENSATION PENDULAIRE**
I. Formes naturelles.
II. Explication pendulaire.
III. Fonction de Poisson-Cauchy.
IV. Généralisation de la Loi de Cauchy.
V. Justification des moindres carrés.
VI. Construction de la courbe de Cauchy.
CONCLUSION.

PREMIÈRE PARTIE
THÉORIES CLASSIQUES

I. PROBABILITÉ (Pascal Fermat) (fig. 1)

La Probabilité est le rapport du nombre des cas favorables au nombre de cas possibles.

Exemples :

- au jeu de un dé, la probabilité de trouver trois est

$$\frac{1}{6} = 0{,}166...$$

- la probabilité de tirer le roi de cœur d'un jeu de 52 cartes, est

$$\frac{1}{52} = 0{,}0192...$$

La Probabilité est un nombre arithmétique compris entre zéro et un. Zéro signifie l'impossibilité. Un signifie la certitude.

II. PROBABILITÉ TOTALE

La probabilité de l'un quelconque de plusieurs événements caractérisés chacun par sa probabilité est égale à la somme (ou total) des probabilités.

Exemple :

La probabilité de trouver l'un quelconque des quatre rois, est $\frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52}$. C'est bien toujours le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

La probabilité totale est plus grande que chacune des probabilités initiales.

III. PROBABILITÉ COMPOSÉE (Moivre)

La simultanéité de deux événements hasardeux caractérisés chacun par sa probabilité, est

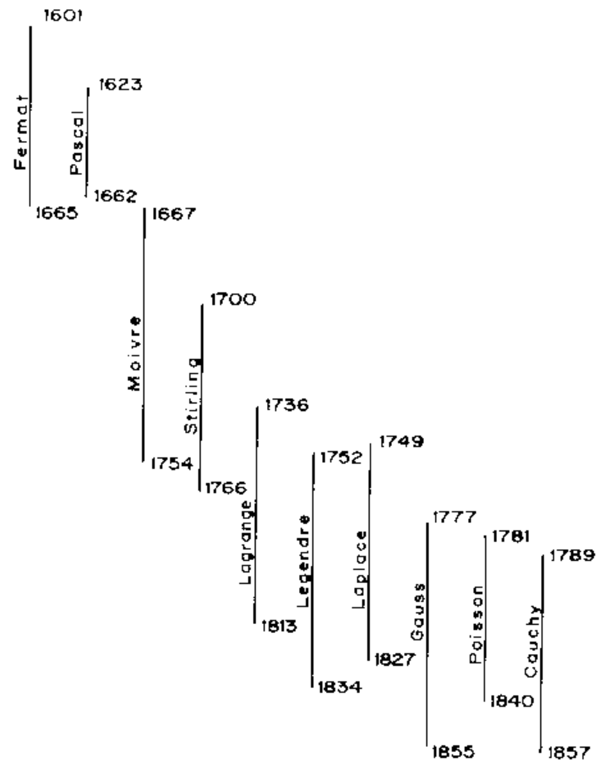


Fig. 1

elle-même un événement hasardeux dont la probabilité est égale au produit des deux premières probabilités.

Le nombre des cas favorables est en effet égal au produit des nombres de cas favorables initiaux. Le nombre des cas possibles est égal au produit des nombres de cas possibles initiaux.

Exemple :

La probabilité de trouver en même temps le trois d'un dé et le roi de cœur, est

$$0{,}166 \times 0{,}0192 = 0{,}003.$$

La probabilité composée est beaucoup plus petite que chacune des probabilités composantes.

IV. LOIS DE LAPLACE

Laplace, considérant le résultat de tirs, remarqua que les coups, dispersés au hasard, n'en semblent pas moins obéir à des lois.

1° La dispersion est limitée. Les écarts sont petits. On peut les préciser par une fraction d'unité de longueur choisie suffisamment grande.

2° Les écarts sont symétriques par rapport à un certain écart nul qui par conséquent peut être considéré comme leur moyenne arithmétique.

3° Les écarts sont d'autant plus nombreux qu'ils sont petits.

V. LOI, OU FORMULE DE LAPLACE

« On dit aussi Loi de Gauss, Loi de Laplace-Gauss, Loi normale. La dénomination de Loi de Laplace n'est guère utilisée qu'en France. Il est cependant plus équitable d'associer cette loi au nom de Laplace, plutôt qu'à celui de Gauss. »

(R. Fortet - C.N.R.S., 1965.)

Laplace fut donc le premier à représenter ses lois par la formule

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad \text{telle que} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\, dx$$

soit la probabilité pour qu'un écart soit compris entre x et x + dx.

Pour démontrer sa formule Laplace fit l'hypothèse, évidemment restrictive, que l'erreur finale est causée par la présence ou l'absence d'un certain nombre d'erreurs initiales égales entre elles. Les combinaisons possibles sont représentées par les mêmes coefficients que ceux de la formule du binôme. Ces coefficients utilisent les factorielles. Or, les factorielles peuvent être calculées avec une certaine approximation par la formule de Stirling. (Fig. 2.)

$n\,! = n^n e^{-n} \sqrt{2 \Pi n}\,(1 + \epsilon n)$
ϵ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

Fig. 2. Formule de Stirling.

VI. DÉMONSTRATION DE GAUSS

Gauss tenait à reprendre les problèmes à la base, sans d'ailleurs donner de référence, avant de les épuiser dans la voie où ils se trouvaient engagés.

Sa démonstration de la formule de Laplace, à partir de la deuxième loi, est la suivante :

Soit $\varphi(x)$ la fonction cherchée, telle que la probabilité d'une erreur comprise entre x et x + dx soit $\varphi(x)\,dx$.

Par hypothèse, la valeur z d'une grandeur mesurée n fois, est :

$$z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_i + \ldots + z_n}{n}$$

Chacune des mesures $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots z_n$ est entachée d'une erreur $z_1 - z$, $z_2 - z$, $\ldots z_i - z$, $\ldots$, $z_n - z$ et la probabilité de cette erreur est

$$\varphi\,(z_i - z)\,dx$$

En vertu du théorème de Moivre (voir III), la probabilité de l'erreur commise sur la moyenne est le produit des probabilité de chacun de ses éléments, soit :

$$\varphi\,(z_1 - z) \cdot \varphi\,(z_2 - z) \ldots \ldots \varphi\,(z_i - z) \ldots \ldots \varphi\,(z_n - z)$$

Si la moyenne arithmétique est ce qui est le plus probable, sa probabilité est maximale et sa dérivée nulle.

En tenant compte que

$$(u\,v)' = u\,v' + v\,u'$$

$$\text{et que } \frac{(u\,v)'}{u\,v} = \frac{v'}{v} + \frac{u'}{u}$$

on obtient

$$\frac{\varphi'(z_1 - z)}{\varphi(z_1 - z)} + \frac{\varphi'(z_2 - z)}{\varphi(z_2 - z)} + \ldots + \frac{\varphi'(z_i - z)}{\varphi(z_i - z)} + \ldots + \frac{\varphi'(z_n - z)}{\varphi(z_n - z)} = 0$$

Mais d'autre part :

$$(z_1 - z) + (z_2 - z) + \ldots + (z_i - z) + \ldots + (z_n - z) = 0$$

Cela exige que « par identification » (procédé classique)

$$\frac{\varphi'(z_1 - z)}{\varphi(z_1 - z)} = (z_1 - z)\,\theta$$

$$\frac{\varphi'(z_2 - z)}{\varphi(z_2 - z)} = (z_2 - z)\,\theta$$

.... θ étant un coefficient.

La fonction $\varphi(x)$ est donc égale à sa dérivée divisée par x.

On pense à e^x puisque $(e^x)' = e^x$.

Essayons e^{x^2}.

On a $(e^{x^2})' = e^{x^2} . 2\,x$.

Essayons $e^{\frac{x^2}{2}}$

On a bien $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}}\,x$

Mais cette dernière dérivée est positive, ce qui serait contraire à la 3e loi.

Finalement $e^{-\frac{x^2}{2}}$

telle que $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = - e^{-\frac{x^2}{2}}\, x$

fut retenue par Gauss.

VII. COURBE OU FONCTION RÉDUITE

Cette dernière fonction n'était encore qu'une fonction de répartition. La somme des probabilités partielles doit être égale à un. Autrement dit, c'est une certitude (probabilité un) que l'erreur se trouve entre $-\infty$ et $+\infty$. Or la surface de la courbe e^{-x^2} est $\sqrt{\Pi}$ (résultat classique) ce qui est plus grand que un. Pour que la courbe e^{-x^2}, de répartition, devienne aussi une courbe de probabilité, il faut la « réduire », en lui donnant l'affinité $\frac{1}{\sqrt{\Pi}}$.

La surface de la courbe $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est $\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$

On a en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Et nous voulons calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}$ est la différence des deux valeurs pour $x = 0$ et pour $x = +\infty$ d'une certaine fonction $F(x)$ dont la dérivée $F'(x)$ est égale à e^{-x^2}.

Remplaçons x par $\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Nous aurons $F'\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc la fonction primitive de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ne peut pas être $F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ dont la dérivée est $e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mais elle est $\sqrt{2} \,.\, F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ dont la dérivée est bien $e^{-\frac{x^2}{2}}$

Les valeurs de $F(x)$ et de $F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ sont les mêmes pour $x = 0$.

Les valeurs de $F(x)$ et de $F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ sont les mêmes pour $x = +\infty$.

Donc

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$.

Remarque I

Nous avons tenu à expliciter un résultat important généralement présenté comme évident.

Un peu plus loin (paragraphe IX) le même raisonnement pourra être fait en remplaçant $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par k.

Remarque II

De surcroît, ce raisonnement et son résultat s'appliquent à n'importe quelle loi éventuelle de probabilité. (2e Partie - Paragraphe IV.)

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = 1$ (Laplace)

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$ (Gauss)

VIII. JUSTIFICATION DES MOINDRES CARRÉS

Quand des mesures surabondantes sont confrontées, il faut se décider à corriger chacune d'une quantité $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

La probabilité de l'ensemble retenu est égale à (théorème de Moivre) (voir III)

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

Cela est égal à

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)}$$

ou à

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,\sqrt{\pi})^n} \; \frac{1}{e^{\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)}}$$

Cette probabilité est bien maximale si la somme des carrés

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2$ est minimale.

IX. NOUVEL APPORT DE GAUSS

Le passage de la moyenne arithmétique à la moyenne pondérée (Géomètre, nov. 69 - p. 28) se fait en substituant :

a) Px à x dans la moyenne simple.

b) Px^2 à x^2 dans la somme des moindres carrés à rendre minimum, équivalente à la moyenne pondérée.

Gaus, qui était donc déjà passé de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Fig. III. — Construction de la courbe de Laplace-Gauss.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0,00	—	—	—	1,00000	0,56418	0,01410	0,01410
0,05	0,0025	0,00109	1,0025	0,99751	0,56278	0,02814	0,04224
0,10	0,0100	0,00434	1,0100	0,99010	0,55859	0,02793	0,07017
0,15	0,0225	0,00977	1,0227	0,97780	0,55166	0,02758	0,09775
0,20	0,0400	0,01737	1,0408	0,96080	0,54206	0,02710	0,12485
0,25	0,0625	0,02714	1,0643	0,93941	0,53000	0,02650	0,15135
0,30	0,0900	0,03909	1,0942	0,91391	0,51561	0,02578	0,17713
0,35	0,1225	0,05320	1,1303	0,88472	0,49914	0,02496	0,20209
0,40	0,1600	0,06949	1,1735	0,85215	0,48077	0,02404	0,22613
0,45	0,2025	0,08794	1,2245	0,81666	0,46074	0,02304	0,24917
0,50	0,2500	0,10857	1,2840	0,77882	0,43939	0,02197	0,27114
0,55	0,3025	0,13137	1,3532	0,73899	0,41692	0,02085	0,29199
0,60	0,3600	0,15634	1,4333	0,69769	0,39362	0,01968	0,31167
0,65	0,4225	0,18349	1,5258	0,65539	0,36976	0,01849	0,33016
0,70	0,4900	0,21280	1,6323	0,61263	0,34563	0,01728	0,34744
0,75	0,5625	0,24429	1,7550	0,56980	0,32146	0,01607	0,36351
0,80	0,6400	0,27795	1,8965	0,52729	0,29749	0,01487	0,37838
0,85	0,7225	0,31377	2,0595	0,48555	0,27394	0,01370	0,39208
0,90	0,8100	0,35177	2,2478	0,44488	0,25099	0,01255	0,40463
0,95	0,8930	0,38782	2,4427	0,40938	0,23096	0,01155	0,41618
1,00	1,0000	0,43429	2,7183	0,36788	0,20755	0,01038	0,42656
1,05	1,1025	0,47880	3,0116	0,33205	0,18734	0,00937	0,43593
1,10	1,2110	0,52593	3,3578	0,29781	0,16802	0,00840	0,44433
1,15	1,3225	0,57435	3,7528	0,26647	0,15034	0,00752	0,45185
1,20	1,4400	0,62538	4,2206	0,23693	0,13367	0,00668	0,45853
1,25	1,5625	0,67858	4,7706	0,20962	0,11826	0,00591	0,46444
1,30	1,6900	0,73395	5,4192	0,18453	0,10411	0,00521	0,46965
1,35	1,8225	0,79149	6,1871	0,16163	0,09119	0,00456	0,47421
1,40	1,9600	0,85121	7,0991	0,14086	0,07947	0,00397	0,47818
1,45	2,1025	0,91309	8,1862	0,12216	0,06892	0,00345	0,48163
1,50	2,2500	0,97715	9,4875	0,10540	0,05946	0,00297	0,48460
1,55	2,4025	1,04338	11,0505	0,09049	0,05105	0,00255	0,48715
1,60	2,5600	1,11178	12,9350	0,07731	0,04362	0,00218	0,48933
1,65	2,7225	1,18235	15,2140	0,06573	0,03708	0,00185	0,49118
1,70	2,8900	1,25510	17,9930	0,05558	0,03136	0,00157	0,49275
1,75	3,0625	1,33001	21,3800	0,04677	0,02639	0,00132	0,49407
1,80	3,2400	1,40710	25,5330	0,03917	0,02210	0,00111	0,49518
1,85	3,4225	1,48636	30,6450	0,03263	0,01841	0,00092	0,49610
1,90	3,6100	1,56779	36,9650	0,02705	0,01526	0,00076	0,49686
1,95	3,8025	1,65139	44,8120	0,02232	0,01259	0,00063	0,49749
2,00	4,0000	1,73716	54,5960	0,01832	0,01033	0,00052	0,49801

(1) Abscisses de 0 à 2, de 0,05 à 0,05.
(2) carrés des abscisses.
(3) x^2 log e (log e = 0,43429).
(4) antilogarithme de x^2 log e.
(5) inverse de (4).
(6) (5) multiplié par $1/\sqrt{\pi}$ = 0,56418 c'est y cherché.
(7) (6) multiplié par 0,05 sauf les 2 termes extrêmes multipliés par 0,025.
(8) addition cumulée de (7).

(Laplace) à $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, passe à $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} e^{-Px^2}$ ou $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}$, dont les deux premières formules sont des cas particuliers.

X. GÉNÉRALISATIONS DES MOINDRES CARRÉS

Dès lors, quand des mesures surabondantes confrontées sont caractérisées chacune par un facteur k, appelé module de précision, ou plus simplement racine carrée du poids, la probabilité de l'ensemble retenu est

$$\frac{k_1 k_2 \dots k_i \dots k_n}{\sqrt{\pi}} e^{-(k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + \dots + k_i^2 x_i^2 + \dots + k_n^2 x_n^2)}$$

Cette probabilité est bien maximale pour $k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + \dots + k_i^2 x_i^2 + \dots + k_n x_n$ minimum.

Le critère des moindres carrés, découvert par Legendre et conduit à sa perfection par Gauss est plus général que la règle de la moyenne pondérée.

On ne peut affirmer en effet que n'importe quelle solution par les moindres carrés est équivalente à une telle moyenne.

En nivellement par exemple, la somme des résidus multipliés chacun par son poids, d'un point isolé, est bien nulle. Par contre, le résidu de la dénivelée entre deux points nouveaux, aussi petit que possible certes, peut aussi bien être envisagé dans un sens que dans l'autre... (Géomètre de nov.-déc. 1969 - page 33.)

Les moindres carrés sont une induction, solution générale dont à toute occasion, la moyenne pondérée n'est qu'un cas particulier.

La démonstration de Gauss (voir VI) n'en serait que la justification dans le cas particulier de la moyenne. (Joseph Bertrand.)

XI. CONSTRUCTION DE LA COURBE DE LAPLACE-GAUSS

Nous avons choisi de construire point par point la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, en passant par l'intermédiare des logarithmes décimaux à 5 décimales. Nous considérons x tous les 0,05 de 0 à 2. L'ordonnée y passe de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56417$ pour $x = 0$ à 0,01033 pour $x = 2$.

Nous donnons (fig. 3 - colonnes (1) à (6)) le détail des calculs, et fig. 4 la courbe elle-même. Cette courbe est bien (fig. 3 colonnes (7) et (8)) telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = 1$

puisque $\int_{0}^{+2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \simeq 0{,}5$

XII. FORME DE LA COURBE DE LAPLACE-GAUSS

Telle quelle, la célèbre courbe de Gauss n'a pas manqué de faire penser à une cloche, à un chapeau de gendarme, etc.

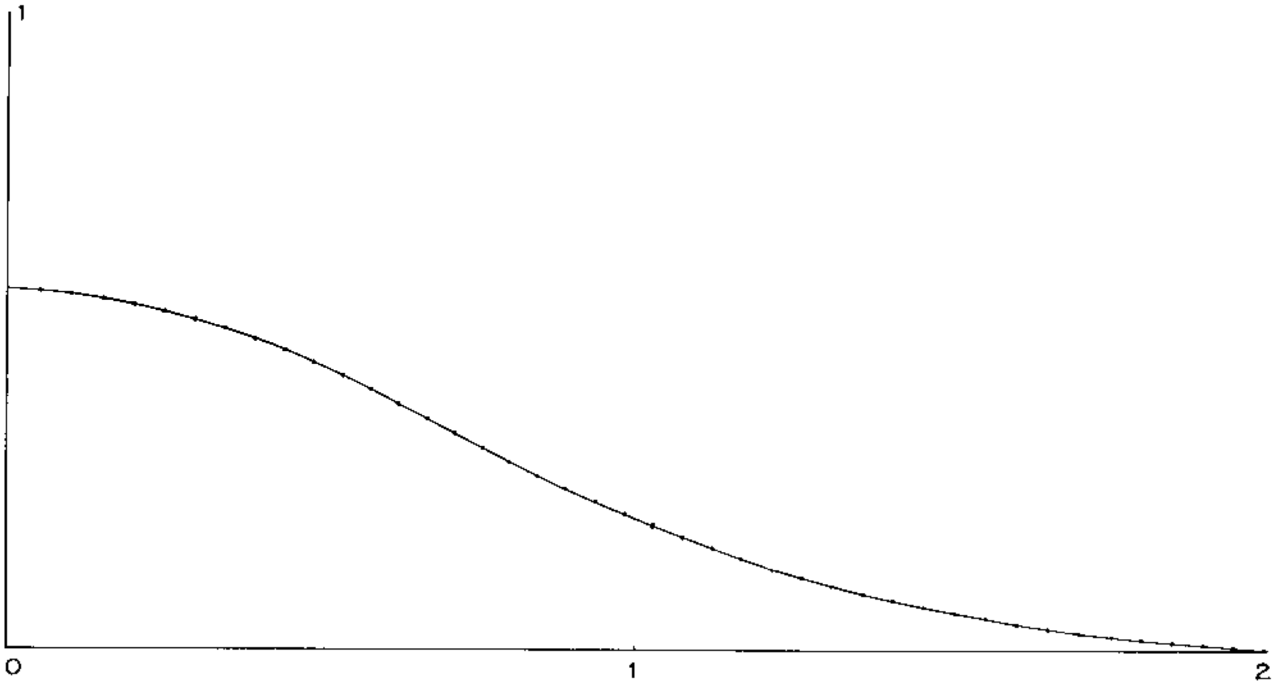


Fig. 4 Courbe de Laplace Gauss

DEUXIÈME PARTIE

COMPENSATION PENDULAIRE

I. FORMES NATURELLES

Personne ne semble avoir jamais regardé la courbe de probabilité à l'envers et remarqué qu'elle se trouve gravée dans la nature en un nombre infini d'exemplaires.

Tout passage obligé, tout lieu de circulation, ne finit-il pas par être usé sensiblement et selon une loi de probabilité ?

Il ne faut pas faire plus de quelques dizaines de mètres à Paris et ailleurs pour découvrir au moins l'esquisse de la courbe de probabilité.

Sur un sentier forestier ensoleillé, l'ombre des troncs fait ressortir la coupe en large du lieu de passage creusé par les pas.

II. COMPENSATION PENDULAIRE

Considérons d'un peu plus près la marche du seuil d'une vieille maison. Assimilons les jambes des visiteurs à des pendules non seulement longitudinaux, mais latéraux, de longueur L et de poids P.

Le travail nécessaire pour écarter une seule fois de x le pendule qui oppose une force proportionnelle à $\frac{P}{L}x$ (Géomètre de nov.-déc. 69 - p. 31, fig. 8) est

$$\int_0^x \frac{P}{L} x \, dx = \frac{1}{2}\frac{P}{L}x^2$$

Le travail de creusement au point d'abscisse x, y, est évidemment proportionnel au nombre de passages en x. (Fig. 6.)

L'énergie consacrée à écarter le pendule n'est pas consacrée à user la pierre.

Soit A la part d'énergie ayant creusé tout entière sans écartement du pendule.

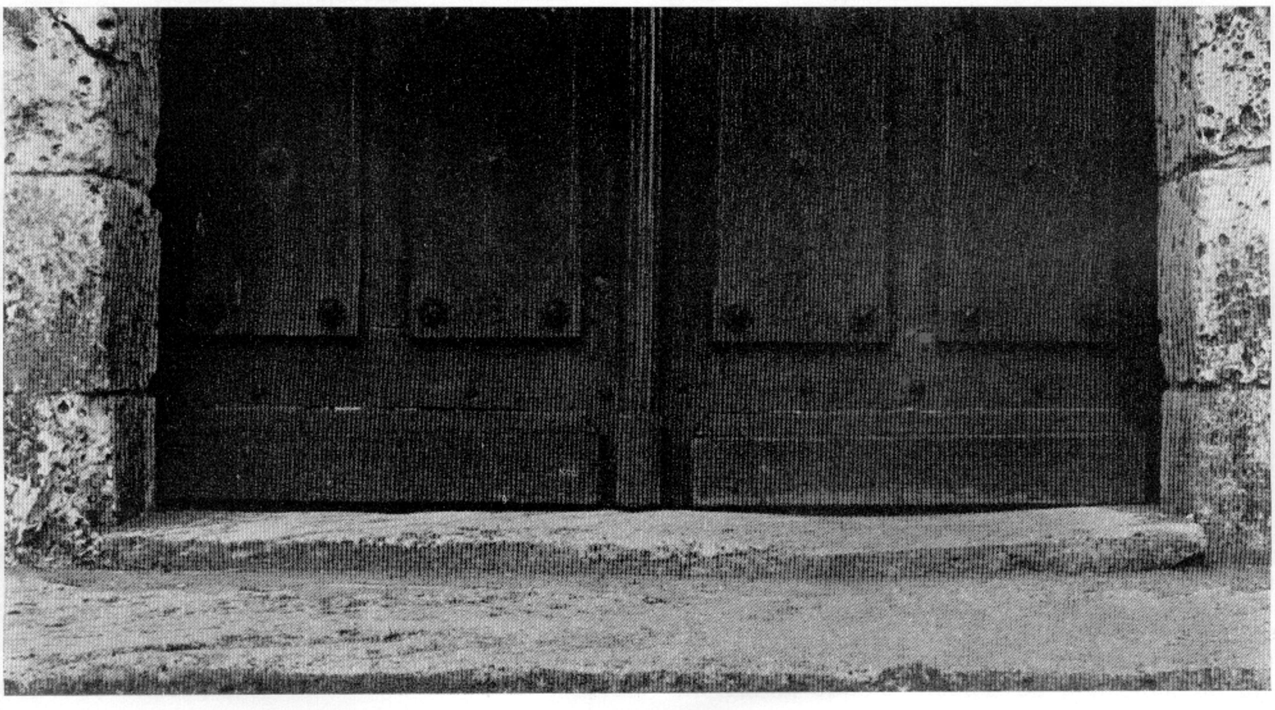
On a au point d'abscisse x

$$y = A - \left(\frac{1}{2}\frac{P}{L}x^2\right) \times \frac{y}{1} \text{ fois, en}$$

choisissant pour unité ϵ d'énergie, l'énergie dépensée par un pas, pour creuser le μ unités de longueur ;

d'où $A = y + \frac{1}{2}\frac{P}{L}x^2 y = y\left(1 + \frac{1}{2}\frac{P}{L}x^2\right)$

d'où $$y = \frac{A}{1 + \frac{1}{2}\frac{P}{L}x^2}$$



III. FONCTION DE POISSON-CAUCHY

Cette fonction de répartition, à un coefficient près que nous ne tarderons pas à préciser, n'était pas nouvelle.

R. Fortet, déjà cité, définit comme « Loi de Cauchy », la Loi de Probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} =$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} = 2 \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

C'est Paul Lévy qui en 1925 a sauvé de l'oubli cette loi de Probabilité dont il écrit :

« Cette loi, considérée par Cauchy... avait même été considérée antérieurement par Poisson... Mais Cauchy a le premier bien mis en évidence l'ensemble des propriétés de cette loi... et nous avons cru devoir adopter le nom de Loi de Cauchy. »

IV. GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE CAUCHY

Ce que fit Gauss en deux temps à la Loi de Laplace, nous venons de le faire en une seule fois, paragraphe II, à la Loi de Cauchy.

En posant $\frac{1}{2} \frac{P}{L} = k^2$, nous avons substitué $k^2 x^2$ à x^2.

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} =$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 2 \text{ arc tg } \infty - 2 \text{ arc tg } 0 = \pi$$

D'après le paragraphe VII de la 1re partie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} = \frac{\pi}{k}.$$

Pour que la courbe de répartion $y = \frac{1}{1+k^2x^2}$ devienne une courbe de probabilité, il faut la multiplier par

$$\frac{k}{\pi}$$

On prendra A du paragraphe II égal à $\frac{k}{\pi}$

On aura bien finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi} \frac{1}{1+k^2x^2} =$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{k}{\pi} \frac{1}{1+k^2x^2} = 2\frac{k}{\pi} \text{ arc tg } \infty \frac{1}{k}$$

$$= 2\frac{k}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{1}{k} = 1$$

V. JUSTIFICATION DES MOINDRES CARRÉS

Quand des mesures surabondantes confrontées sont caractérisées chacune par son $k = \sqrt{P}$, la probabilité de l'ensemble retenu est

$$\frac{k_1}{\pi} \frac{1}{1+k_1^2x_1^2} \cdot \frac{k_2}{\pi} \frac{1}{1+k_2^2x_2^2}$$

$$\ldots \cdot \frac{k_i}{\pi} \frac{1}{1+k_i^2x_i^2} \ldots \cdot \frac{k_n}{\pi} \frac{1}{1+k_n^2x_n^2}$$

$$= \frac{k_1 . k_2 \ldots k_i \ldots k_n}{\pi^n} \frac{1}{1+k_1^2x_1^2} \cdot \frac{1}{1+k_2^2x_2^2}$$

$$\ldots \frac{1}{1+k_i^2x_i^2} \ldots \frac{1}{1+k_n^2x_n^2}$$

$$= \frac{k_1 . k_2 \ldots k_i \ldots k_n}{\pi^n}$$

$$\frac{1}{1+k_1^2x_1^2+k_2^2x_2^2+\ldots+k_i^2x_i^2+\ldots+k_n^2x_n^2}$$

en négligeant les termes de puissance supérieure à deux. Cette fraction est bien maximale pour un dénominateur minimum, soit

$$k_1^2x_1^2+k_2^2x_2^2+\ldots+k_i^2x_i^2+\ldots+k_n^2x_n^2$$

minimum.

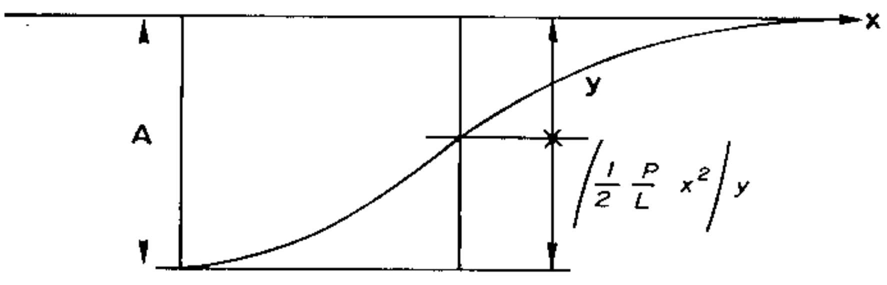


Fig. 6

Fig. VII. — Construction de la courbe de Cauchy.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,00	0,0000	1,0000	1,00000	0,31831	0,00796	0,00796
0·05	0,0025	1,0025	0,99751	0,31752	0,01588	0,02384
0,10	0,0100	1,0100	0,99010	0,31516	0,01576	0,03960
0,15	0,0225	1,0225	0,97800	0,31131	0,01557	0,05517
0,20	0,0400	1,0400	0,96154	0,30702	0,01535	0,07052
0,25	0,0625	1,0625	0,94118	0,29959	0,01498	0·08550
0,30	0,0900	1,0900	0,91743	0,29203	0,01460	0,10010
0,35	0,1225	1,1225	0,89087	0,28357	0,01418	0,11428
0,40	0,1600	1,1600	0,86207	0,27441	0·01372	0,12800
0,45	0,2025	1,2025	0,83160	0,26471	0,01324	0,14124
0,50	0,2500	1,2500	0,80000	0,25465	0,01273	0,15397
0,55	0,3025	1,3025	0,76775	0·24438	0,01222	0,16619
0,60	0,3600	1,3600	0,73529	0,23405	0,01170	0,17789
0,65	0,4225	1,4225	0·70299	0,22377	0,01119	0,18908
0,70	0,4900	1·4900	0,67114	0,21363	0,01068	0,19976
0,75	0,5625	1,5625	0,64000	0,20372	0,01019	0,20995
0,80	0·6400	1,6400	0,60976	0,19409	0,00970	0,21965
0·85	0,7225	1,7225	0,58055	0,18479	0,00924	0,22889
0,90	0,8100	1,8100	0,55249	0,17587	0,00879	0,23768
0,95	0,8930	0,8930	0,52562	0,16731	0,00837	0,24605
1,00	1,0000	2,0000	0,50000	0,15916	0,00796	0,25401
1,05	1,1025	2,1025	0,47562	0,15139	0,00757	0,26158
1,10	1,2110	2,2110	0,45249	0,14403	0,00720	0,26878
1,15	1,3225	2,3225	0,43057	0,13705	0,00685	0,27563
1,20	1,4400	2,4400	0,40984	0,13046	0,00652	0,28215
1,25	1,5625	2,5625	0,39024	0,12422	0,00621	0·28836
1,30	1,6900	2,6900	0,37175	0,11833	0,00592	0,29428
1,35	1,8225	2,8225	0,35430	0,11278	0,00564	0,29992
1,40	1,9600	2,9600	0,33783	0,10753	0·00538	0,30530
1,45	2,1025	3,1025	0,32232	0,10260	0,00513	0,31043
1,50	2,2500	3,2500	0,30769	0,09794	0,00490	0,31533
1,55	2,4025	3,4025	0,29390	0·09355	0,00468	0,32001
1,60	2,5600	3,5600	0,28090	0,08941	0,00447	0,32448
1,65	2,7225	3,7225	0,26863	0,08551	0,00428	0,32876
1,70	2,8900	3·8900	0,25707	0,08183	0,00409	0,33285
1,75	3·0625	4,0625	0,24615	0,07835	0,00392	0,33677
1,80	3,2400	4,2400	0,23585	0,07507	0,00375	0,34052
1·85	3,4225	4,4225	0,22612	0,07198	0,00360	0,34412
1,90	3,6100	4,6100	0,21692	0,06905	0,00345	0,34757
1,95	3,8025	4,8025	0,20822	0,06628	0,00331	0,35088
2,00	4,0000	5,0000	0,20000	0,06366	0,00159	0,35247

(1) abscisses de 0 à 2, de 0,05 en 0,05.
(2) carrés des abscisses x^2.
(3) $1 + x^2$.
(4) $1/1 + x^2$.
(5) (4) $\times$ 1/II = (4) $\times$ 0,3183.
(6) (5) multiplié par 0·05 sauf les termes extrêmes, multipliés par 0,025.
(7) addition cumulée de (6).

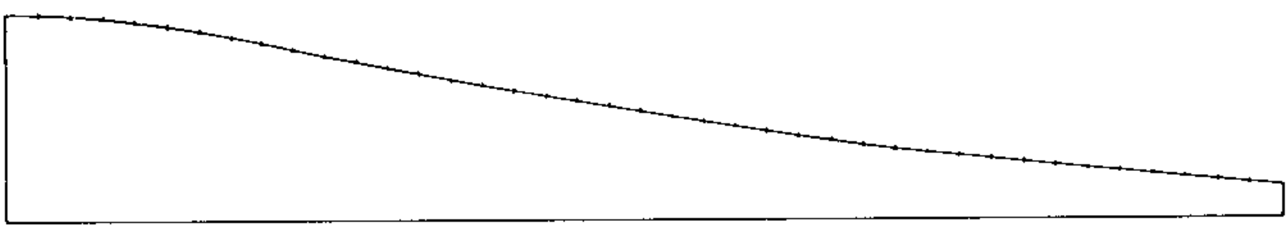


Fig. 8 Courbe de Cauchy

VI. CONSTRUCTION DE LA COURBE DE CAUCHY

Construisons point par point la courbe

$$y = \frac{1}{\Pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

Comme pour la courbe de Laplace-Gauss (Ire Partie - Ch. XI) nous considérons x tous les 0,05 de 0 à 2. L'ordonnée y passe de $\frac{1}{\Pi} = 0,31831$ pour $x = 0$, à 0,06366 pour $x = 2$. Les deux courbes par conséquent se croisent. Pour $x = 2$, la surface représentée n'est que les $\frac{35}{50}$ de la surface totale. Toujours pour $x = 2$, la surface représentée de la courbe de Gauss est des $\frac{49}{50}$ (fig. 7 et 8).

« La courbe $\left(y = \frac{1}{\Pi} \frac{1}{1 + x^2} \right)$ a une forme analogue à celle de Gauss ; mais à l'infini y décroît beaucoup moins rapidement que pour la loi de Gauss... » (Paul Lévy.)

CONCLUSION

La courbe de Cauchy, pendulairement démontrée, s'accommode et même se prête à toutes sortes de limitations et de compositions.

La courbe de Gauss jouit de proportions harmonieuses et canoniques, en même temps que de propriétés fort élégantes — et nécessaires — de composition avec elle-même.

Qu'en est-il de toutes les courbes de probabilité pendulairement représentables ?

Plus d'un métaphysicien méditant sur la Création, lui trouve intrinsèquement lié le phénomène de l'élasticité.

Plus près de nous, n'importe quel phénomène — dans un monde sans cesse en mouvement et où tout plus ou moins se tient, entre son établissement et le commencement de sa fin — reste fidèle à lui-même malgré les déformations — heureusement élastiques — qui lui sont imposées de l'extérieur.

L'établissement de la formule de Cauchy, à partir de cette hypothèse de l'élasticité générale — ne faisant appel qu'à des considérations de répartition de l'énergie — ne sort pas du domaine de la mécanique rationnelle.

P.C.

Nous tenons à remercier Mme Dianville-Tinus à qui nous dédions cette étude, des précieuses intuitions dont elle a bien voulu nous faire part et qui nous ont ouvert des horizons.