Une histoire de lampe.

Un industriel met au point un nouveau type de lampe. Il lui est indispensable d'indiquer la longévité de ces nouvelles ampoules électriques.

Comme tout le monde, ou presque, il sait que le modèle mathématique utilisé pour évaluer cela est une fonction exponentielle. C'est une loi de probabilité sans mémoire, sans vieillissement et sans usure. Il sait bien qu'une ampoule électrique n'a pas de mémoire, mais elle vieillit et s'use si l'on s'en sert, mais comme tout le monde, il va utiliser cette loi de probabilité.

Il se documente un peu et comprend que le principe est «la probabilité que le phénomène dure au moins *s* + *t* heures sachant qu'il a déjà duré *t* heures sera la même que la probabilité de durer *s* heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant *t* heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps *t*. » [Wikipédia]. Il en résulte qu'il existe un temps T tel que la moitié des lampes aura claqué avant ce temps T et l'autre moitié durera plus longtemps que ce temps T. Il est clair que la durée de vie moyenne arithmétiques µ des durées de vie lampes ne sera pas ce temps T, mais en lisant soigneusement la documentation il peut lire qu'il y a une relation précise entre ce temps T et la moyenne µ.
Notre industriel, curieux de nature, observe que tous les documents qu'il consulte sont d'accord entre eux et affichent la courbe correspondante qui a une très jolie forme de toboggan.

Maintenant qu'il connaît les bases, il lui faut déterminer la durée qu'il va indiquer sur l'emballage. Il n'imagine pas d'autre méthode que de prendre au hasard un certain nombre d'ampoules de sa production et de les laisser allumées jusqu'à ce qu'elle claquent, ce qui lui permettra de calculer un temps moyen de fonctionnement et qu'en déduire le temps T correspondant à la médiane.

Tout semble donc parfait, il a fabriqué son nouveau type d'ampoules et précisé la durée de 1/2 vie, comme c'est l'usage.

Un de ses vieux amis est très intéressé par cette nouvelle ampoule et décide d'équiper ses ateliers, halls de magasin etc. Comme pour tout matériel, il doit prévoir le stock de remplacement. Le délai de fabrication et de livraison est de deux mois, il doit donc calculer le nombre d'ampoules à avoir en stock pour pouvoir remplacer les ampoules claquées.

Alors sa secrétaire, pas très forte en math, lui dit qu'il doit prévoir un nombre d'ampoules égal au nombre total d'ampoules de ses ateliers et hall de magasins, puisqu'il est très possible que ces ampoules claquent toutes entre deux dates de livraison. Heureusement le responsable du stock passe par là et lui explique que ce n'est pas possible qu'elles claquent toutes pendant cette période.
Pour lui montrer, il fait une petite simulation avec son langage informatique préféré. La simulation, outre les nombres correspondants, dessine la courbe des fréquence des nombres d'ampoules à changer par semaine. Et, oh surprise, la courbe affichée est une très jolie courbe en cloche. Le patron reconnaît immédiatement la courbe de Gauss dont on lui avait dit que c'était un cas particulier, et s'exclame « mais pourtant, il s'agit de la loi exponentielle ! Mes professeurs m'ont donc raconté des bêtises ! ».

J’ai eu une réponse par mail, je la publie avec l’autorisation de l’auteur.
Je répondrai ensuite.

On constateras que la secrétaire connaît plus de maths que le gestionnaire de stock, puisqu'il dis "c'est impossible que" alors que cela l'est. Plus précisément :

1) il arrivera à court de stock dans les deux premiers mois, avec proba

(1-e^(-lambda.2))^N > 0

où N est le nombre de lampe en stock, et lambda = ln(2)/temps de demi vie (en mois).

2) quelque soit le stock il y a une probabilité non nulle de tomber en rupture de stock en moins de deux mois

Peut être le gestionnaire as-t-il un esprit plus pragmatique en disant que "impossible" signifie en fait "a peu de chance de se produire"... Mais pour donner une réponse mathématique précise il faudrait dire ce que signifie exactement "impossible".

On voit d'ailleurs qu'il ne comprends rien au maths, puisqu'il pense qu'une simulation peut prouver un résultat théorique. En revanche la simulation peut bien lui montrer si le risque de rupture de stock est "acceptable" ou non à son goût (ce qui est très différent de "impossible").

Et finalement, cerise sur le gâteau, il sait que la durée de vie d'une ampoule est une loi exponentielle, et semble penser que cela signifie que le nombre d'ampoule à changer par semaine devrait être une exponentielle ? Il n'a vraiment jamais étudié les probas, sinon il aurait su qu'il obtiendrais une Binomiale.

Considérons N ampoules indépendantes. Notons Bi la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ampoule i claque durant la semaine (et 0 sinon). La somme des Bi est donc le nombre d'ampoules à changer durant la somme. Chaque Bi est une variable de Bernoulli de paramètre p=(1-e^(-lambda)) (cette fois ci il faut prendre le temps de demi vie en semaine).

Le nombre d'ampoule a changer durant la semaine est donc une loi binomiale de paramètres (N,p). Qui ressemble à une loi normale pour N grand (et p pas trop petit).

Bref, une fois de plus faux sur toute la ligne : toujours la même incompréhension de ce qu'est un énoncé rigoureux

(en maths 0.00000000000001 =/=0) et le même mélange de tout et n'importe quoi (durée de vie avec somme d'indicatrices).

Tu peux publier la réponse sur ton pdf ou ton forum. Mais bon, avec ta mauvaise fois habituelle tu diras une fois de plus qu'on a dis "c'est faux", sans explications ou preuve alors...

On remarquera que le ton dépasse souvent celui habituellement employé dans échanges d'ordre scientifique. Je vais essayer l'expliquer les choses point par point.

Le terme « impossible » employé par le gestionnaire du stock est à prendre dans le sens de la boutade de Napoléon « impossible n'est pas français ».
La préoccupation est de gérer un stock, alors tout espace occupé inutilement entraîne à une perte d'argent. Il ne s'agit pas qu'un exercice de mathématique, mais d'une histoire de lampe.

Cette phrase mérite une remarque :
« quelque soit le stock il y a une probabilité non nulle de tomber en rupture de stock en moins de deux mois ».
On sait, parce qu'on l'a démontré, que environ 7 observations ou mesures sur 1000 sont « hors tolérance », c'est à dire douteuses. On admet souvent que suivant le nombre de mesures ces valeurs « hors tolérance » sont purement et simplement éliminées. En bon français, cela veut dire « il est impossible d'avoir obtenu ces valeurs, donc en n'en tient pas compte ».
Donc, on sait très bien que la probabilité est non nulle, mais la préoccupation n'est pas de calculer la probabilité, mais d'évaluer le stock nécessaire.

A propos de la loi de durée de vie, qui est une loi « sans mémoire ».
C'est une loi telle que la moitie des ampoules va claquer avant le temps médian T et l'autre moitié après. Chaque ampoule peut être considérée comme une valeur d'une variable de loi binomiale qui vaut 1 si l'ampoule fonctionne encore et 0 si elle a claqué. Puisque T est la valeur de la médiane, la probabilité p est égale à 1/2. C'est une loi bien connue, Galton l'a visualisée avec une planche plantée de clous en quinconce. C'est le même principe que le jeu de PILE ou FACE avec une pièce équilibrée et c'est ce qu'on simule avec un générateur de nombres aléatoires lorsque l'on teste la parité du résultat. Cette variable est connue sous le nom de variable de Bernoulli.

Donc, on fait une expérience dont on sait que la loi est une loi exponentielle et que le résultat est une variable de Bernoulli. Toutes les épreuves de cette expérience sont identiques, puisque toutes les ampoules proviennent de la même fabrication.
Le résultat a donc la répartition des fréquences conformes à la loi normale.

Il est toujours étonnant de lire « une loi ressemble à telle autre loi ». En mathématique, on dirait plutôt « telle loi tend vers telle autre ». La loi de Bernoulli est la loi normale, c'est le second théorème. Rien n'interdit pour les calculs de discrétiser la variable. Ce n'était pas le but de ce papier, puisqu'aucune valeur numérique n'a été précisée.

Finalement, cette phrase peut laisser croire que son auteur ne sait pas simuler une expàérience dont les éléments, c'est à dires les différentes valeurs de la variable étudiée, suivent une loi exponentielle.
« l sait que la durée de vie d'une ampoule est une loi exponentielle, et semble penser que cela signifie que le nombre d'ampoule à changer par semaine devrait être une exponentielle ? »
Bien sûr, on peut utiliser un logiciel mathématique, mais le plus simple est de simuler ce qui se passe réellement. Une ampoule fonctionne jusqu'à ce qu'elle claque. Donc il suffit de faire une boucle infinie avec un compteur qui indique le temps t. A chaque pas de boucle, on teste la valeur d'un nombre aléatoire. Si ce nombre est égal à un nombre fixé à l'avance, la lampe chaque et on note, pour cette ampoule, le temps t, c'est à dire le moment ou elle a chaqué et on sort de boucle.
Ce type de simulation doit être évident pour quiconque approche ce type de problème.